Problème : ARQP électrique

(extrait du concours ST 2006)

5a) Montrer que: $\vec{E}_2(r,t)=\left(\frac{r}{2c}\right)^2 \frac{1}{q(t)} \frac{d^2q(t)}{dt^2}\vec{E}_0(t)$. On prendra: $\vec{E}_2(0,t)=\vec{0}$.

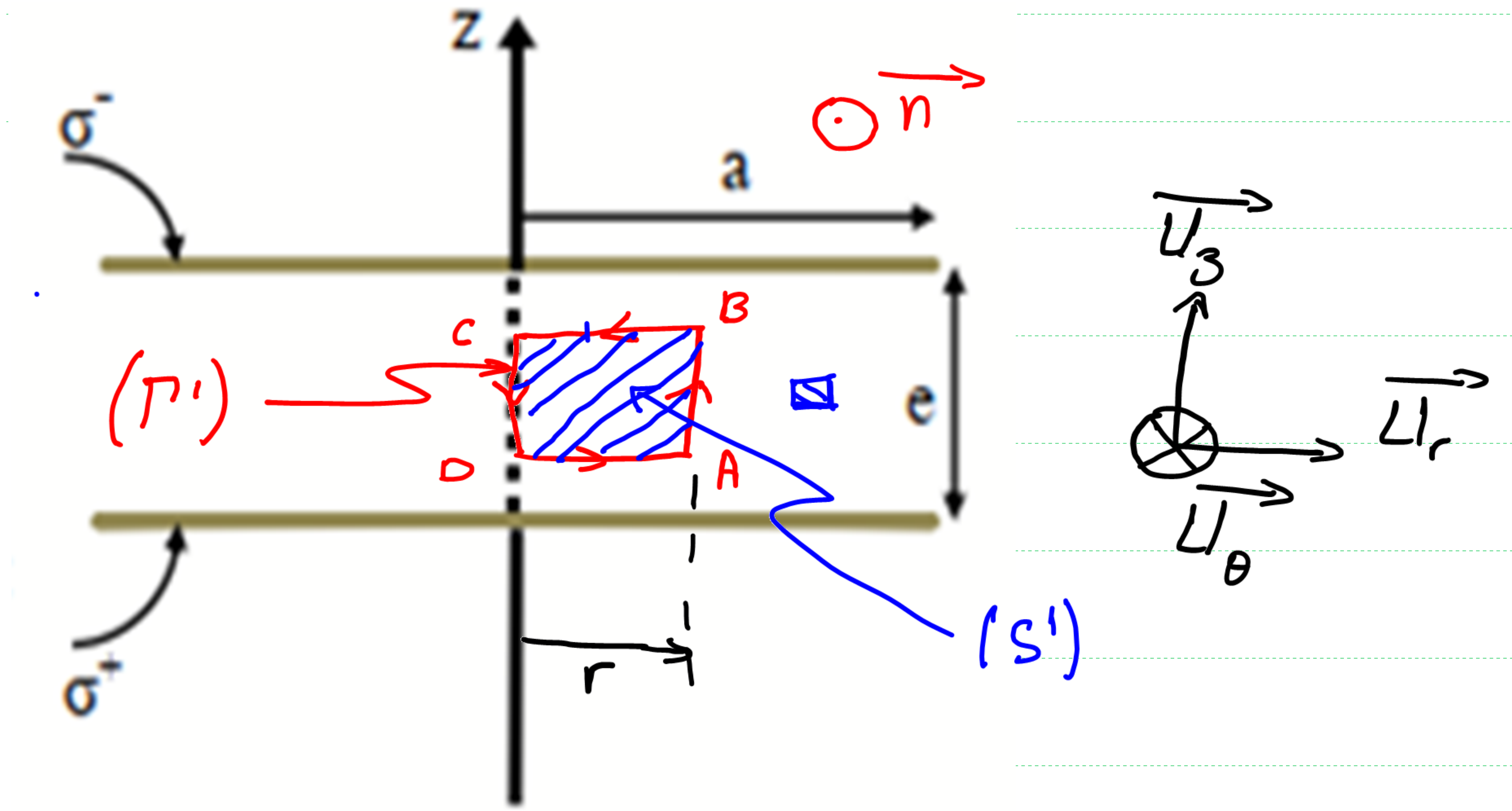
$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}_2 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$ (M-F) $\vec{B}_1$ (cause) $\vec{E}_2$ (effet)

$\oint_{(\Gamma')} \vec{E}_2 \cdot \vec{dl} = -\iint_{(S')} \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \cdot \vec{dS}$ (S') surface qui repose sur le contour (Γ')

critère du choix du contour (Γ')

- $\vec{E}_2$ et $\vec{dl}$ sont colinéaires
- $\vec{E}_2$ est uniforme par segment sur le contour (Γ')

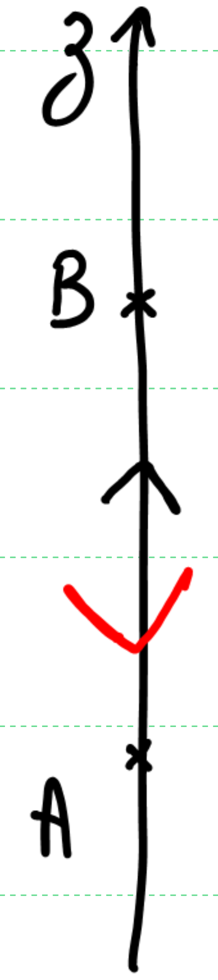
On a $\vec{E_2}(M,t) = E_2(r,t)\,\vec{U_z}$ $\longrightarrow$ (Γ') rectangle situé dans le plan $(\vec{U_r},\vec{U_z})$



$$\oint_{(\Gamma')} \vec{E_2}\,\vec{dl} = \int_A^B E_2(r,t)\vec{U_z}\,dz\,\vec{U_z} + \int_B^C \underbrace{E_2(r,t)\vec{U_z}\,dr\,\vec{U_r}}_{0} + \int_C^D \underbrace{E_2(r=0,t)}_{0}\vec{U_z}\,dz\,\vec{U_z} + \int_D^A \underbrace{E_2(r,t)\vec{U_z}\,dr\,\vec{U_r}}_{0}$$

$$\oint \vec{E_2}\,\vec{dl} = E_2(r,t)\int_{z_A}^{z_B} dz = E_2(r,t)\,AB$$

Rq:



$$\int_A^B \vec{dl} = \int_{z_A}^{z_B} dz\,\vec{u_z} = (z_B - z_A)\,\vec{u_z} = AB\,\vec{u_z} = \vec{AB}$$

$$\int_B^A \vec{dl'} = +\int_{z_B}^{z_A} dz\,\vec{u_z} = +(z_A - z_B)\,\vec{u_z} = -\vec{AB} = \vec{BA}$$

D'après la (Q.4), on a : $\overrightarrow{B_1}(r,t) = \frac{\mu_0 r}{2\pi a^2}\frac{dq(t)}{dt}\overrightarrow{u_\theta}$

$$\iint_{(S')} \frac{\partial \overrightarrow{B_1}}{\partial t}.\overrightarrow{dS} = \frac{\mu_0}{2\pi a^2}\frac{d^2q(t)}{dt^2}\int_0^r\int_{z_A}^{z_B} r\,\overrightarrow{u_\theta}\left(-dr\,dz\,\overrightarrow{u_\theta}\right) = -\frac{\mu_0}{2\pi a^2}\frac{d^2q(t)}{dt^2}.AB.\frac{1}{2}r^2$$

$$\oint \overrightarrow{E_2}\,\overrightarrow{dl} = -\iint \frac{\partial \overrightarrow{B_1}}{\partial t}\,\overrightarrow{dS} \longrightarrow E_2(r,t)\cancel{AB} = +\frac{\mu_0 r^2}{4\pi a^2}\frac{d^2q(t)}{dt^2}.\cancel{AB}$$

$$E_2(r,t) = \frac{\mu_0 r^2}{4\pi a^2}\frac{d^2q(t)}{dt^2}$$

avec $E_0(t) = \dfrac{q(t)}{\pi a^2 \varepsilon_0}$ (Q.3) $\longrightarrow \dfrac{1}{\pi a^2} = \dfrac{\varepsilon_0 E_0(t)}{q(t)}$

$$E_2(r,t) = \frac{\mu_0 r^2}{4} \cdot \frac{\varepsilon_0 E_0(t)}{q(t)} \frac{d^2 q(t)}{dt^2}$$

, or, on a : $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$

$$\overrightarrow{E_2}(r,t) = \frac{r^2}{4c^2} \frac{1}{q(t)} \frac{d^2 q(t)}{dt^2} \overrightarrow{E_0}(t)$$

5b) On suppose, que les variations de la charge q(t) sont sinusoïdales: $q(t) = q_0 \cos(wt)$.

Exprimer le champ électrique $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_2$ en fonction de $\vec{E}_0$ et la variable $u = wr/c$.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_2 = \vec{E}_0\left(1 + \frac{r^2}{4C^2}\frac{1}{q(t)}\frac{d^2q(t)}{dt^2}\right)$$

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} = -q_0 W^2 \cos(wt) = -W^2 q(t)$$

$$= \vec{E}_0\left(1 - \frac{r^2W^2}{4C^2}\right)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0\left(1 - \frac{u^2}{4}\right)$$

. 5c) Montrer que le champ électrique $\vec{E}$ peut être confondu à $\vec{E}_0$ si le rayon a des armatures est très inférieur à une valeur a_0 qu'on exprimera en fonction de c et w. Commenter.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_2 = \vec{E}_0 \left(1 - \left(\frac{r w}{2c}\right)^2_{max} \right) \simeq \vec{E}_0 \qquad \text{avec} \quad 0 \leqslant r \leqslant a$$

$$\left(\frac{a w}{2c}\right)^2 \ll 1 \longrightarrow \frac{a w}{2c} \ll 1 \longrightarrow a \ll \frac{2c}{w} = a_0 = \frac{2c}{2\pi} \cdot T = \frac{\lambda}{\pi} < \lambda$$

$$\text{l'A.R.Q.P} \equiv \text{l'A.R.Q.S}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_2 \simeq \vec{E}_0 \quad \text{si} \quad a \ll \frac{2c}{w} = a_0$$

5d) En prenant a = 1 cm et f = 1MHz, évaluer l'ordre de grandeur de l'erreur relative que l'on comment en confondant $\vec{E}$ à $\vec{E}_0$.

$$\left\| \frac{\Delta \vec{E}_{max}}{\vec{E}_0} \right\| = \frac{\|\vec{E} - \vec{E}_0\|_{max}}{\|\vec{E}_0\|} = \left(\frac{a\omega}{2c} \right)^2$$

$$= \left(\frac{10^{-2} \times \cancel{2}\pi 10^{6}}{\cancel{2} \times 3 10^{8}} \right)^2 = \left(\frac{\pi}{3} \right)^2 10^{-8} = 1{,}1\, 10^{-8}$$